Berufskolleg für Technik des Märkischen Kreises 58509 Lüdenscheid	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme	Blatt 1	Ki

Einsetzungsverfahren

Man stellt **eine** beliebige Gleichung nach einer Variablen um und setzt den Ergebnisterm in **alle** anderen Gleichungen ein. Dadurch erhält man ein Gleichungssystem mit einer Gleichung und einer Variablen weniger als zuvor.

Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & 2x+5y+2z=-15 \\ \text{II} & 3x-\ \ y+2z=5 \\ \text{III} & 5x+2y-6z=16 \end{array}}$$

Gleichung II läßt sich besonders gut nach y umstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{II} & 3x-\ \ y+2z=5 \quad \vert +y-5 \\ & 3x+2z-5=y \end{array}$$

Diesen Term setzen wir in Gleichung I und in Gleichung III ein:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & 2x+5(3x+2z-5)+2z=-15 \\ \text{III} & 5x+2(3x+2z-5)-6z=16 \end{array}}$$

Wir müssen jetzt nur noch die beiden Gleichungen zusammenfassen und erhalten somit ein Gleichungssystem mit nur noch 2 Gleichungen und 2 Variablen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & 2x+15x+10z-25+2z=-15 \\ \text{III} & 5x+6x+4z-10-6z=16 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & 17x+12z-25=-15 \quad \vert +25 \\ \text{III} & 11x-2z-10=16 \quad \vert +10 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & 17x+12z=10 \\ \text{III} & 11x-2z=26 \end{array}}$$

Dieses neu entstandene Gleichungssystem läßt sich nun mit jedem beliebigen Verfahren weiter reduzieren, bis eine einzige Gleichung mit nur einer Variablen entsteht.

Additions-/Subtraktionsverfahren

Stimmen die Koeffizienten einer Variablen betragsmäßig in zwei Gleichungen überein, so fällt diese Variable weg, wenn man die Gleichungen addiert oder subtrahiert. Bei unterschiedlichem Vorzeichen addiert man, bei gleichem Vorzeichen muß man eine Gleichung von der anderen subtrahieren. Stimmen die Koeffizienten nicht überein, dann können sie durch Multiplikation einer oder beider Gleichungen mit einem geeigneten Faktor gleich gemacht werden.

Enthält das Gleichungssystem **mehr als zwei** Gleichungen, dann müssen sie mehrfach paarweise so miteinander kombiniert werden, dass **jedes mal die gleiche** Variable entfällt.

Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & 2x+5y+2z=-15 \\ \text{II} & 3x-\ \ y+2z=5 \\ \text{III} & 5x+2y-6z=16 \end{array}}$$

In Gleichung I und II stimmen die Koeffizienten von z bereits überein. Es bietet sich also an, im ersten Reduktionsschritt die Variable z zu eliminieren.

Die erste neue Gleichung erhalte ich direkt aus der Differenz der Gleichungen I und II:

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & 2x+5y+2z=-15 & \\ \text{II} & 3x-\ \ y+2z=5 & - \\ \hline \text{IV} & -x+6y\quad\ =-20 & \end{array}$$

Wir haben bis jetzt erst **eine** neue Gleichung erhalten, die aber **zwei** Variable enthält. Daher benötigen wir noch eine zweite Gleichung mit den **gleichen** Variablen. Wir können die Gleichung III dazu mit Gleichung I **oder** II verknüpfen. Ich wähle willkürlich die Gleichung II aus. Da die Koeffizienten von Gleichung II und III verschieden sind, muß Gleichung II mit dem Faktor 3 multipliziert werden:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{II} & 3x - y + 2z = 5 \quad | \cdot 3 \\ \text{III} & 5x + 2y - 6z = 16 \end{array}}$$

Die Koeffizienten von z sind nun beide gleich (6), mit unterschiedlichem Vorzeichen. Daher kann ich addieren:

$$\begin{array}{ll} \text{II} & 9x - 3y + 6z = 15 \\ \text{III} & 5x + 2y - 6z = 16 \quad | + \\ \hline \text{V} & 14x - y \quad = 31 \end{array}$$

Ich schreibe noch die eben erstellte Gleichung IV dazu und erhalte zwei Gleichungen mit nur noch 2 Variablen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{IV} & -x + 6y = -20 \\ \text{V} & 14x - y = 31 \end{array}}$$

Dieses neu entstandene Gleichungssystem läßt sich nun mit jedem beliebigen Verfahren weiter reduzieren, bis eine einzige Gleichung mit nur einer Variablen entsteht.

Cramersche Regel

Die Lösung einer beliebigen Variablen läßt sich als Quotient zweier Determinanten beschreiben. Die Nennerdeterminante entspricht der Koeffizientenmatrix, die Zählerdeterminante im Prinzip auch, wobei die Spalte, die zur gesuchten Variablen gehört, durch den Vektor bestehend aus den rechten Seiten der Gleichungen ersetzt wird.

Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & 2x + 5y + 2z = -15 \\ \text{II} & 3x - y + 2z = 5 \\ \text{III} & 5x + 2y - 6z = 16 \end{array}}$$

Somit lauten die Lösungen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -15 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 16 & 2 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -15 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -15 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}}$$

Diese Determinanten müssen nun noch ausgerechnet werden. Dies ist auf mehrere Weisen möglich, wie nachfolgend beschrieben wird.

Am einfachsten sind zweireihige Determinanten zu bestimmen. Es gibt zwei Produkte, die addiert werden. Dabei wird das Produkt der Elemente auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten positiv und das Produkt der Elemente auf der Diagonalen von links unten nach rechts oben negativ gezählt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinanten mit mehr als 2 Reihen müssen schrittweise reduziert werden. Man entwickelt sie nach einer Zeile oder einer Spalte. Dabei werden **alle** Elemente **einer** beliebigen Zeile oder Spalte mit der Unterdeterminante multipliziert, die übrig bleibt, wenn man die Zeile **und** die Spalte des jeweiligen Elementes auslöscht. Das zugehörige Vorzeichen bestimmt sich aus der Zeilennummer und der Spaltennummer des betreffenden Elementes. Ist die Summe dieser beiden Nummern gerade, so ist es positiv, anderenfalls negativ.

Beispiel: Entwickeln nach 1. Zeile

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Beispiel: Entwickeln nach 2. Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Eine Ausnahme ist die **genau 3-reihige** Determinante. Diese muß nicht entwickelt werden, sie kann auch nach dem **Satz von Sarrus** aufgelöst werden. Um dies besser vornehmen zu können, schreibt man die erste und zweite Spalte noch einmal hinter die Determinante. So kann man 3 positive Diagonalen von links oben nach rechts unten und 3 negative Diagonalen von links unten nach rechts oben bilden. Die Determinante wird demnach wie folgt aufgelöst:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$